

基于鬃毛摩擦理论的环形橡胶减振器 动态迟滞特性模型

李峙岳, 朱如鹏, 李苗苗

(南京航空航天大学 机电学院, 南京 210016)

摘 要: 对环形橡胶减振器的动态特性进行了理论建模。综合考虑材料的高弹特性、频率相关动态特性以及摩擦相关动态特性,并将形状因素的影响考虑在内,提出了一种基于鬃毛摩擦理论的描述减振器动态迟滞特性模型。比较以往的基于库仑摩擦理论的模型,该模型具有对摩擦速度依赖特性的描述能力,且能够预测摩擦应力在零速附近的非线性特征,使得拟合出的动态迟滞特性曲线具有很多微小的波浪特征。开展了测量减振器径向动态迟滞特性的试验,试验结果表明:环形橡胶减振器的实际动态迟滞曲线并非光滑的椭圆环,而是具有很多细微波浪的近似椭圆环,且在激振频率偏高时,波浪特征相对明显,验证了基于鬃毛摩擦理论的理论模型与实际情况的规律和趋势一致、特征相似。

关 键 词: 动态特性; 迟滞曲线; 环形橡胶减振器; 鬃毛摩擦理论; 形状因素

中图分类号: V255⁺.3

文献标志码: A

Dynamic hysteresis characteristics model of rubber damping ring based on bristle friction theory

LI Zhiyue, ZHU Rupeng, LI Miaomiao

(College of Mechanical and Electrical Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210006, China)

Abstract: The dynamic characteristics of rubber damping ring were theoretically developed. The high elastic properties, frequency-related dynamic properties and friction-related dynamic properties were comprehensively considered, and the effect of shape factors was taken into account as well; a model of rubber damping ring with dynamic hysteresis characteristics was presented based on the bristle friction theory. Compared with the former model based on Coulomb friction theory, this model could describe the dependence of friction velocity and calculate the nonlinear characteristics of friction stress nearby the point of zero velocity, producing a lot of tiny wave features to the dynamic hysteresis loops. Experimental research on the measurement of radial dynamic hysteresis characteristics was conducted. Experimental results show that the actual dynamic hysteresis loops of rubber damping ring are approximate elliptic curves with many tiny waves instead of smooth ones. And the wave characteristics of the hysteresis loops are relatively obvious at higher exciting frequencies. The experimental research proves that the rules and trends of theoretical model based on the

收稿日期: 2016-11-30

基金项目: 国家自然科学基金(51375226)

作者简介: 李峙岳(1987—),男,博士生,主要从事轴系减振研究。

通讯作者: 朱如鹏(1959—),男,教授、博士生导师,博士,主要从事轴系减振研究。E-mail: rpzhu@nuaa.edu.cn

引用格式: 李峙岳,朱如鹏,李苗苗. 基于鬃毛摩擦理论的环形橡胶减振器动态迟滞特性模型[J]. 航空动力学报,2018,33(5):1136-1143. LI Zhiyue, ZHU Rupeng, LI Miaomiao. Dynamic hysteresis characteristics model of rubber damping ring based on bristle friction theory[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(5): 1136-1143.

bristle friction theory and actual situation are consistent, and their characteristics are similar.

Key words: dynamic characteristics; hysteresis loops; rubber damping ring; bristle friction theory; shape factors

橡胶材料作为一种可靠、轻便的弹性阻尼材料,在航空领域应用广泛。本文的研究对象环形橡胶减振器便是一种可以应用在传动轴系中的减振装置。

最早模拟橡胶材料动态模型有 Maxwell 模型和 K-V (Kelvin-Voigt) 模型。Maxwell 模型由弹簧和黏壶串联而成^[1],能够较好地描述材料松弛特性但不能描述蠕变特性;K-V 模型是由弹簧和黏壶并联而成^[2],能较好地描述材料蠕变特性但不能描述材料的松弛特性。以上两种模型参数较少,不能准确描述出隔振器的频率相关性,因而发展了广义 Maxwell 模型^[3]、广义 K-V 模型^[4]和 Zener 模型^[5]。这些模型的基本思路是将多个 Maxwell 模型或多个 K-V 模型串联或并联使用^[6-7]。另外还有一些其他的模型,如 Lubliner 等^[8]所提出的模型更加着重于 Mullin 效应^[9]。Yajima 等提出一种广义的 Maxwell 模型,并讨论了模型的适用范围^[10]。王锐等^[11-12]提出一种适合描述隔振橡胶在宽频振动时力学行为的本构模型,模型包含超弹性和黏弹性两个部分:超弹性部分表征橡胶材料的静态特性;非线性黏弹性部分描述橡胶材料在振动、冲击载荷下的动态响应。孙德伟等^[13]提出一种变刚度、变阻尼的橡胶隔振器动力学模型,并进行试验验证。赵广等^[14]在静态刚度模型的基础上,提出一种基于静态刚度的动力学模型,为橡胶隔振器动态特性研究提供了一种简洁、实用的思路。韩德宝等^[15]用神经网络法拟合试验数据。利用曲线重构分析了神经网络曲线拟合试验数据的可行性。陈安华等^[16]研究了由地基振动激励的隔振体的非线性动力响应。以上模型都是针对橡胶建立描述材料特性的数学模型,并未将形状因素考虑进去。Hill 利用傅里叶-贝塞尔函数首先推导了有限长橡胶筒的径向刚度公式^[17]。Horton 等根据变型贝塞尔函数推导了有限长橡胶筒的径向刚度公式^[18-19]。

结合以上理论,可以计算出环形橡胶材料的动态特性。但是已有的研究大都用库仑摩擦模型^[20]表述橡胶材料的摩擦相关特性,库仑摩擦模型是一种及其简化的表征摩擦的模型,实际的动

态过程复杂得多。本文基于鬃毛摩擦理论^[21-22],对橡胶材料的摩擦相关动态特性进行了深一步的扩展补充,并设计了试验,验证了理论模型的合理性。为进一步研究应用于传动轴系的环形橡胶减振器奠定了基础。

1 模型的建立

应用于传动轴系的环形橡胶减振器的实物图如图 1 所示。该减振器安装在轴承外圈与支座之间。要建立该减振器的动态特性模型,首先有必要对橡胶材料的动态特性进行研究。



图 1 环形橡胶减振器
Fig. 1 Rubber damping ring

目前比较先进的橡胶材料模型一般都考虑了橡胶材料的三个典型特性,分别建立对应各个特性的子模型,每个子模型的特性都由一个应力的表达式来表述,然后将子模型的结果叠加得到材料的特性。典型的橡胶材料模型如图 2 所示, σ_e 是描述材料弹性的弹性应力模型; σ_{fre} 是描述材料频率相关特性的应力模型; σ_{fri} 是描述材料摩擦相关特性的应力模型。将三个应力表达式进行叠加,得到的总应力即可代替描述橡胶材料的动态特性。 $\sigma(t)$ 、 $\epsilon(t)$ 分别是材料总的应力和应变。

本文基于图 2 模型的框架结构,细化橡胶材料模型的特性子模型,从而更细致地表达橡胶材料的动态迟滞特性,如图 3 所示。本文基于鬃毛摩擦理论,针对橡胶材料的摩擦相关特性进行模型构建。

图 3 中 σ_h 是描述材料超弹特性的应力模型, η_{h0} 为线性刚度系数, η_{h1} 为三次非线性刚度系数, C 为一次黏性阻尼系数; σ_v 是描述材料频率相关黏

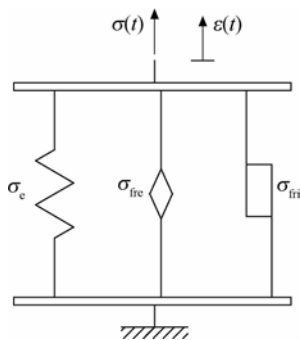


图 2 典型橡胶材料模型

Fig. 2 Typical model of rubber material

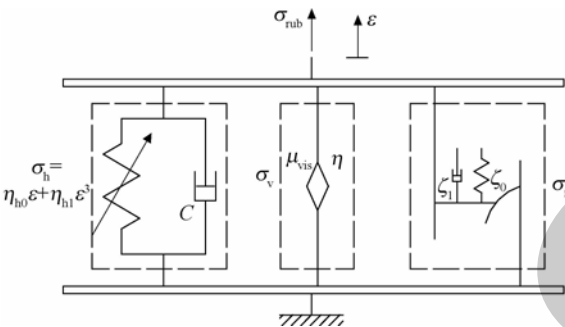


图 3 橡胶材料动态细化模型示意图

Fig. 3 Dynamic refined model of rubber material

弹特性的应力模型, μ_{vis} 是与激振频率 ω 相关的弹性模量, η 是频率相关损耗因子; σ_f 是描述材料摩擦相关特性的应力模型, ζ_0 为鬃毛刚性系数, ζ_1 为鬃毛阻尼系数; σ_{rub} 是橡胶材料的总应力。

$$\mu_d(\omega) = \frac{b_v + b_v a_v \omega^\theta \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right) + c_v \omega^\delta \cos\left(\frac{\delta\pi}{2}\right) + a_v c_v \omega^{\theta+\delta} \cos\left[\frac{(\theta+\delta)\pi}{2}\right]}{1 + a_v^2 \omega^{2\theta} + 2a_v \omega^\theta \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right)} \quad (6)$$
$$\mu_l(\omega) = \frac{c_v \omega^\delta \sin\left(\frac{\delta\pi}{2}\right) - b_v a_v \omega^\theta \sin\left(\frac{\theta\pi}{2}\right) + a_v c_v \omega^{\theta+\delta} \sin\left[\frac{(\delta-\theta)\pi}{2}\right]}{1 + a_v^2 \omega^{2\theta} + 2a_v \omega^\theta \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right)} \quad (7)$$

由以上理论推导出的弹性模量表达式,使用复数形式表达。该复数弹性模量的实部表达了材料的储存模量,反应了该模型的动态刚度性能;虚部表达了该模型的损耗模量,反应的是该模型的

从图 4 和图 5 可以看出,此复数弹性模量的实部和虚部都随着激振频率的增大而变大。且随着激振频率的进一步增大,弹性模量实部、虚部的增长速率明显减小,逐渐趋于平缓。如图 6 所示,

那么新构建的橡胶材料的动态总应力模型为

$$\sigma_{rub} = \sigma_h + \sigma_v + \sigma_f \quad (1)$$

1.1 超弹特性应力模型

橡胶的长链分子网络结构使橡胶材料能够产生超弹性变形。因为分子链段的内旋转运动,不断改变构象,分子越柔越易卷曲、构象数越多,构象熵就越大,由这种熵弹性产生了超弹性。橡胶材料动态应力模型的第一子模型为超弹特性应力模型,描述由橡胶分子间的熵弹性产生的材料超弹特性,可以使用三次曲线表达为

$$\sigma_h = \eta_{h0} \epsilon + \eta_{h1} \epsilon^3 \quad (2)$$

1.2 频率相关黏弹特性应力模型

橡胶材料在加载过程中,聚合链会进行重组,由于重组不是瞬间发生的,伴随着能量损耗,而损耗能量的大小与频率相关,所以,橡胶材料的动态特性中包含有频率相关的特性部分。借用分数导数模型^[23]进行表述

$$\sigma_v(t) + a_v \sigma_v^{(\theta)}(t) = b_v \epsilon(t) + c_v \epsilon^{(\delta)}(t) \quad (3)$$

式中的 a_v 、 b_v 、 c_v 、 θ 、 δ 为模型的五个参数。转化到频域进行参数识别,定义黏弹性模型的等效弹性模量为

$$\mu_{vis}(\omega) = \frac{\sigma_v(\omega)}{\epsilon(\omega)} = \frac{c_v (j\omega)^\delta}{1 + a_v (j\omega)^\theta} \quad (4)$$

可以得到频率相关黏弹特性应力模型的等效弹性模量可以分解为两部分

$$\mu_{vis}(\omega) = \mu_d(\omega) + j\mu_l(\omega) \quad (5)$$

$$\mu_d(\omega) = \frac{b_v + b_v a_v \omega^\theta \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right) + c_v \omega^\delta \cos\left(\frac{\delta\pi}{2}\right) + a_v c_v \omega^{\theta+\delta} \cos\left[\frac{(\theta+\delta)\pi}{2}\right]}{1 + a_v^2 \omega^{2\theta} + 2a_v \omega^\theta \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right)} \quad (6)$$
$$\mu_l(\omega) = \frac{c_v \omega^\delta \sin\left(\frac{\delta\pi}{2}\right) - b_v a_v \omega^\theta \sin\left(\frac{\theta\pi}{2}\right) + a_v c_v \omega^{\theta+\delta} \sin\left[\frac{(\delta-\theta)\pi}{2}\right]}{1 + a_v^2 \omega^{2\theta} + 2a_v \omega^\theta \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right)} \quad (7)$$

阻尼性能。

描述频率相关黏弹特性应力模型阻尼性能的一个重要指标是损耗因子。损耗因子用来衡量该模型的耗能能力,损耗因子 $\eta(\omega)$ 的表达式如下:

$$\eta(\omega) = \frac{c_v \omega^\delta \sin\left(\frac{\delta\pi}{2}\right) - b_v a_v \omega^\theta \sin\left(\frac{\theta\pi}{2}\right) + a_v c_v \omega^{\theta+\delta} \sin\left[\frac{(\delta-\theta)\pi}{2}\right]}{b_v + b_v a_v \omega^\theta \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right) + c_v \omega^\delta \cos\left(\frac{\delta\pi}{2}\right) + a_v c_v \omega^{\theta+\delta} \cos\left[\frac{(\theta+\delta)\pi}{2}\right]} \quad (8)$$

损耗因子的数值也随激振频率的增大而增大,且高频段,损耗因子的增长速率明显减小,逐渐趋于平缓,反应出黏弹性材料损耗能量的能力随着激振频率的增加而增加,高频下,耗能能力逐渐趋于

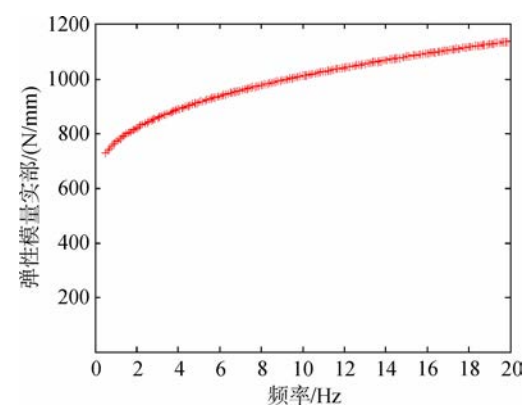


图 4 弹性模量实部随激振频率的变化
Fig. 4 Real part of elastic modulus
varying with exciting frequency

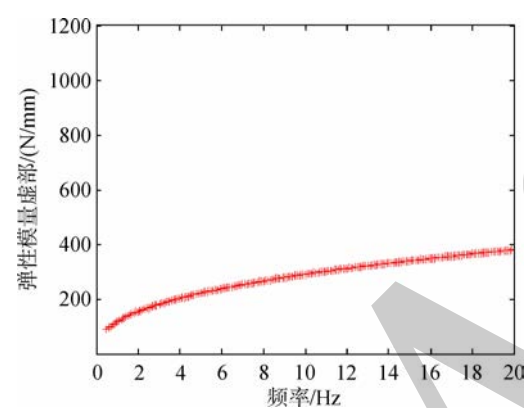


图 5 弹性模量虚部随激振频率的变化
Fig. 5 Imaginary part of elastic modulus
varying with exciting frequency

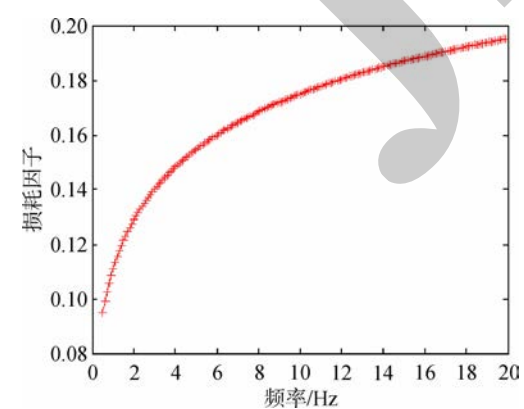


图 6 损耗因子随激振频率的变化
Fig. 6 Loss factor varying with
exciting frequency

某一稳定值。表达式中的五个参数因子 a_v 、 b_v 、 c_v 、 θ 、 δ ，对黏弹性模型的动态刚度实部、动态刚度虚部以及损耗因子的影响趋势各不相同。若 δ 、

a_v 、 b_v 、 c_v 降低， θ 升高，则动刚度实部数值降低；若 δ 、 a_v 、 c_v 降低， θ 和 b_v 升高，则动刚度虚部数值降低；若 θ 、 δ 、 a_v 降低， b_v 、 c_v 升高，则损耗因子数值降低。在此处只使用此分数导数模型，不详细展开说明。得到的频率相黏弹特性应力模型为

$$\sigma_v(\omega) = \mu_{vis}(\omega)\varepsilon(\omega) \tag{9}$$

1.3 摩擦相关特性模型

由于橡胶的填充结构和聚合链之间的弱键变化导致当橡胶变形时，这些键将沿着填充粒子的表面移动，从而导致与摩擦相关的能量损失。从而，橡胶材料的动态特性中又包含与微观摩擦相关的特性部分。

对于动态摩擦模型来说，一个重要的评价指标是模型能否精确地预测摩擦应力在零速附近的动态特性，因为摩擦应力在零速附近受到非线性因素影响最大。以往的研究中，对橡胶材料摩擦相关特性的描述使用的都是库仑摩擦模型，库仑摩擦模型并不能精确地描述摩擦应力在零速附近的动态特性。本文在此处采用由 Dahl 模型扩展形成的 Lugre 模型^[24]模拟该动态摩擦过程，将鬃毛摩擦理论的思想应用在描述橡胶聚合链和橡胶填充材料相互作用的动态过程中。该模型虚拟应变 ε 很好地诠释了零速附近的动态摩擦特性。假定橡胶分子聚合链与填充材料颗粒的两两摩擦表面之间是弹性鬃毛接触，那么该摩擦模型可以由一定数量的弹性鬃毛来模拟，如图 7 所示。

用弹性鬃毛模拟橡胶聚合链，刚性鬃毛固定，模拟橡胶填充材料。当有外力作用时，鬃毛产生变形，系统处于预滑动状态，鬃毛的形变随外力增大而增大，当形变继续增加到一临界值时，接触面产生滑动。不论在何种状态下，每根鬃毛的形变值未必相同，为了降低系统的维数，利用统计学的观念，整个模型的鬃毛形变状态可以用一个形变的平均值代替，如图 8 所示。

鬃毛形变平均值表述的是橡胶分子聚合链的

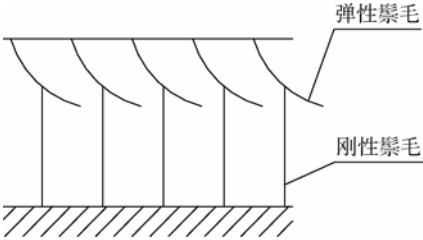


图 7 鬃毛摩擦理论等效示意图
Fig. 7 Equivalent sketch of bristle friction theory

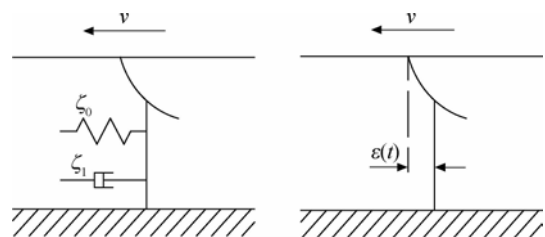


图 8 鬃毛形变状态模型
Fig. 8 Model of bristle deformation

平均应变,用 ϵ 表示。则橡胶分子聚合链的平均应变可用一个微分方程表示

$$\frac{d\epsilon}{dt} = v - \frac{|v|}{g(v)}\epsilon \tag{10}$$

式中 $g(v)$ 满足方程

$$g(v) = \frac{1}{\zeta_0} \{ \sigma_c + (\sigma_s - \sigma_c) \exp[-(v/v_s)^2] \} \tag{11}$$

那么,接触面摩擦应力可表示为

$$\sigma_t = \zeta_0 \epsilon + \zeta_1 \frac{d\epsilon}{dt} + Bv \tag{12}$$

式中 ϵ 为橡胶分子聚合链的平均应变, v 为两摩擦单元的相对速度, σ_s 为静摩擦因数, σ_c 为库仑摩擦因数, v_s 为 Stribeck 速度, ζ_0 为鬃毛刚性系数, ζ_1 为鬃毛阻尼系数, B 为黏性摩擦因数。函数 $g(v)$ 是正值,它取决于材料的性质、润滑、温度等多种因素。当 v 增加时, $g(v)$ 从 $g(0)$ 开始单调降低,这与 Stribeck 负斜率效应相一致。

图 9 直观地描述了在正弦位移激励下橡胶分子聚合链与橡胶填充物之间摩擦应力的动态变化过程:摩擦应力在到达极值后会有一个小幅波动的过程,该过程描述的即是橡胶聚合链分子在橡胶填充颗粒表面滑移的过程。

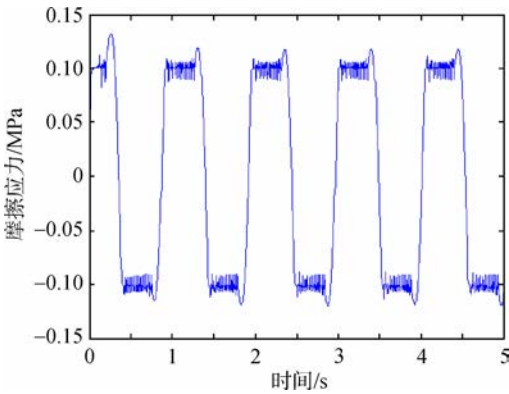


图 9 摩擦应力随时间的变化
Fig. 9 Friction stress varying with time

图 10 中所示的应力、应变关系描述了该摩擦相关特性模型的迟滞特征,反映出橡胶材料在分子聚合链与填充颗粒互相摩擦过程中的能耗。该能耗是橡胶总能耗的重要组成部分。

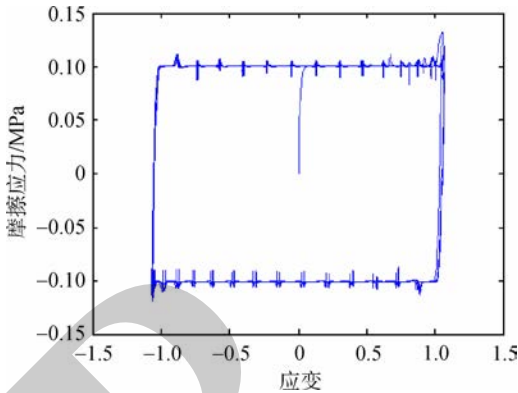


图 10 摩擦应力随应变的变化
Fig. 10 Friction stress varying with strain

图 11 则直观地反应了该摩擦模型在零速附近的动态特性。在零速附近,摩擦应力受到非线性因素影响最大,在该图中可以明显地看到 Stribeck 效应;说明使用鬃毛模型可以更清晰、明确地模拟该动态摩擦过程。

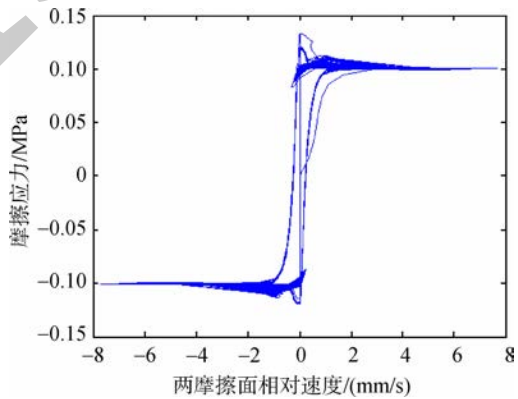


图 11 摩擦应力随相对速度的变化
Fig. 11 Friction stress varying with relative velocity

1.4 考虑形状因素影响的减振器迟滞模型

在受径向载荷作用时,减振器上各处的应力、应变值是不同的,那么直接将子模型应力表达式叠加的方法并不能得到本文的环形橡胶减振器的动态迟滞特性。一个可行的解决办法是求出减振器应变的全局平均值,即一等效应变。根据经典弹性力学理论,可以计算出有限长度橡胶环受径向载荷下的各向异性应变状态下的等效应变。

在径向力作用下环形减振器的等效应变状态为^[18-19]

$$\begin{aligned} \epsilon_{eq}(t) = \\ d_r(t) \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(b^4 - a^4) \ln(b/a) - (a^2 - b^2)^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $d_r(t)$ 为径向位移, a 、 b 分别为圆环的内径和外径。

将式(10)代入到橡胶材料的应力模型(式(1)),可得到环形橡胶减振器的动态迟滞特性应力模型

$$\begin{aligned} \sigma_{total} = \eta_{h0} \epsilon_{eq} + \eta_{h1} \epsilon_{eq}^3 + \mu_{vis}(\omega) \epsilon_{eq} + \\ \zeta_0 \epsilon_{eq} + \zeta_1 \frac{d\epsilon_{eq}}{dt} + Bv \end{aligned} \quad (14)$$

利用 Matlab 软件对上述环形橡胶减振器径向动态特性的模型进行仿真,可以得到如图 12 所示的环形橡胶减振器迟滞曲线。图中红色带点曲线是基于库仑摩擦模型的结果,蓝色曲线是基于鬃毛摩擦理论的结果。

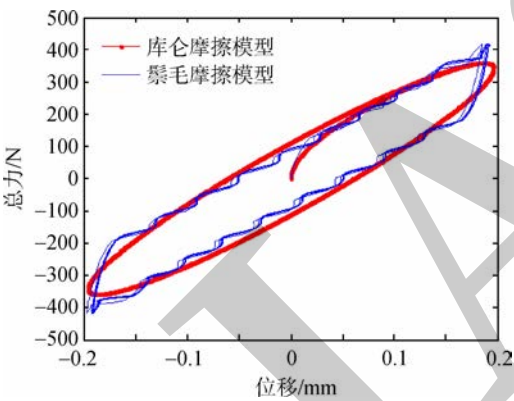


图 12 基于库仑摩擦理论和基于鬃毛摩擦理论的迟滞曲线对比
Fig. 12 Comparison between hysteresis loops based on Coulomb friction theory and bristle friction theory

由图 12 可以看出,库仑摩擦模型虽然可以应用于减振器动态迟滞特性的描述,但是,由于库仑摩擦模型将摩擦应力简化为速度方向的函数^[21],形式简单,缺乏对摩擦速度依赖特性的描述能力,尤其不能预测摩擦应力在零速附近的动态特性,因而缺失了很多动态细节。而鬃毛摩擦理论能够相对准确地描述摩擦应力在零速附近的动态特性,基于鬃毛摩擦理论的动态迟滞曲线丰富得多。

2 迟滞特性试验

2.1 试验方案

为了对环形减振器的实际动态迟滞特性进行

验证,开展了测量环形橡胶减振器径向动态特性的试验。该试验在 PA-100 型拉压疲劳机上进行。试验设备及安装如图 13 所示。疲劳试验机的作动端直接夹持住方形保持架的水平横梁部分。环形橡胶减振器的外部固定不动,当疲劳机作动端运行时,带动芯轴上下往复运动,从而给环形橡胶减振器的内圈施加位移激励。试验时,首先给试验样品施加一定的预载荷,此预载荷等于环形橡胶减振器所受的静载荷,然后在作动端施加位移激励 $x = A \sin(\omega t)$,记录位移传感器的位移信号与对应的力传感器的力信号,可以绘制出相应的迟滞曲线,式中 A 为振动幅值。激振频率的范围为 0~20 Hz。



图 13 试验设备
Fig. 13 Experimental devices

2.2 试验结果分析

如图 14 所示,选取了激振频率 $\omega = 8, 14, 20$ Hz 的三个代表性试验数据进行展示分析,基于鬃毛摩擦理论的模型的计算结果如图 15。

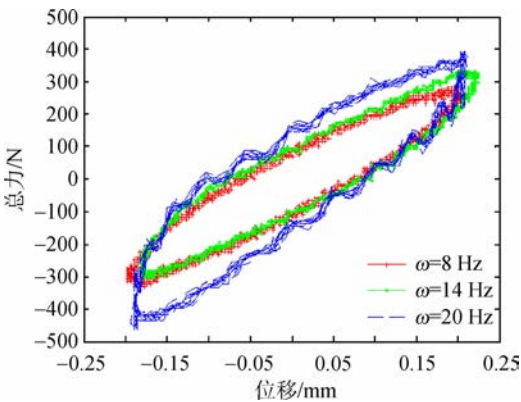


图 14 迟滞曲线试验值
Fig. 14 Experimental results of hysteresis loops

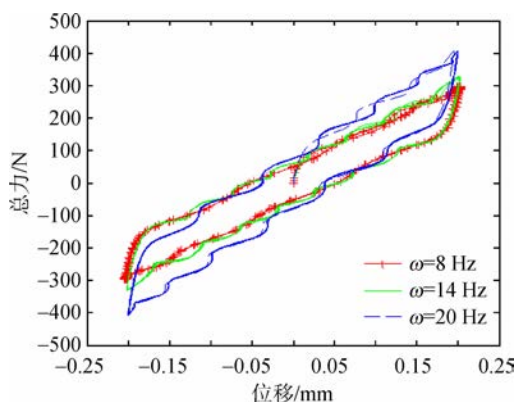


图15 迟滞曲线理论模型计算值

Fig. 15 Theoretical solution of hysteresis loops

由图14可以看出:①实际迟滞曲线并非是光滑的椭圆环,而是有很多细微波浪的近似椭圆环。尤其在高频激励下,这些波浪特性相对明显。②迟滞曲线随激励频率的增加逆时针旋转。

比较图14和图15,可以看出试验曲线与理论计算曲线的规律和趋势是一致的,特征是相似的。说明基于鬃毛摩擦理论的动力迟滞特性模型可以较好地模拟环形橡胶减振器的实际迟滞特性。

3 结论

1) 本文对环形橡胶减振器的动态特性进行了理论建模,该模型综合考虑材料的高弹特性、频率相关动态特性以及摩擦相关动态特性,同时该模型还将形状因素的影响考虑在内。试验结果验证了该模型的合理性。

2) 本文在描述橡胶材料摩擦相关特性时,采用鬃毛摩擦模型模拟由橡胶聚合链和橡胶填充颗粒之间的弱键变化导致的键沿着填充颗粒表面移动形成的动态摩擦过程,这在以往的研究文献中鲜有遇见,以往的模型大多采用静态的库仑摩擦模型对橡胶的摩擦相关特性进行描述。库仑摩擦模型将摩擦应力简化为速度方向的函数,缺乏对摩擦速度依赖特性的描述能力,尤其不能预测摩擦应力在零速附近的动态特性,因而缺失了很多动态细节。而鬃毛摩擦理论能够相对准确地描述摩擦应力在零速附近的动态特性;基于鬃毛摩擦理论的动力迟滞特性模型可以较好地模拟环形橡胶减振器的实际迟滞特性。

参考文献:

[1] SINGH M P, MORESCHI L M. Optimal placement of

dampers for passive response control[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 2002, 31(4): 955-976.

[2] SHUKLA A K, DATTA T K. Optimal use of viscoelastic dampers in building frames for seismic force[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1999, 125(4): 401-409.

[3] SINGH M P, CHANG T S. Seismic analysis of structures with viscoelastic dampers[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, 135(6): 571-580.

[4] MIEHE C, KECK J. Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers: experiments, modeling and algorithmic implementation[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48(2): 323-365.

[5] CHANG T S, SINGH M P. Mechanical model parameters for viscoelastic dampers[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, 135(6): 581-584.

[6] 杨国辉. APU 橡胶隔振器特性研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2012.

YANG Guohui. Research on characteristics of the APU rubber vibration isolator[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012. (in Chinese)

[7] 方建敏. 橡胶材料的分数阶导数型本构模型研究及动力学应用[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2012.

FANG Jianmin. Research on the fractional derivative constitutive model of the rubber isolator and its dynamic applications[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012. (in Chinese)

[8] LUBLINER J. A model of rubber viscoelasticity[J]. *Mechanics Research Communications*, 1985, 12(2): 93-99.

[9] BAGLEY R L, TORVIK P. Fractional calculus: a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures[J]. *AIAA Journal*, 1983, 21(5): 741-748.

[10] YAJIMA T, NAGAHAMA H. Differential geometry of viscoelastic models with fractional-order derivatives[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2010, 43(38): 474-479.

[11] 王锐, 李世其, 宋少云. 隔振橡胶本构建模研究[J]. *振动与冲击*, 2007, 26(1): 77-79.

WANG Rui, LI Shiqi, SONG Shaoyun. Study on constitutive modeling of vibration isolation rubber[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(1): 77-79. (in Chinese)

[12] 王锐. 橡胶隔振器动力学性能及设计方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2007.

WANG Rui. Research on dynamic performance and design method of rubber vibration isolators[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2007. (in Chinese)

[13] 孙德伟, 张广玉. 橡胶隔振器迟滞阻尼特性识别的新方法[J]. *振动与冲击*, 2010, 29(4): 164-168.

SUN Dewei, ZHANG Guangyu. A new approach to identify hysteretic damping of a rubber isolator[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, 29(4): 164-168. (in Chinese)

[14] 赵广, 刘健, 刘占生. 橡胶隔振器非线性动力学模型理论与

实验研究.[J]. 振动与冲击,2010,29(1):173-177.

ZHAO Guang,LIU Jian,LIU Zhansheng. Theoretical and experimental research on nonlinear model of rubber isolator[J]. Journal of Vibration and Shock,2010,29(1):173-177. (in Chinese)

[15] 韩德宝,宋希庚. 橡胶隔振器刚度和阻尼本构关系的试验研究[J]. 振动与冲击,2009,28(1):156-160.

HAN Debao,SONG Xigeng. Experimental study on constitutive model for damping and stiffness of a rubber isolator[J]. Journal of Vibration and Shock,2009,28(1):156-160. (in Chinese)

[16] 陈安华,刘德顺,朱萍玉. 被动隔振体的非线性振动分析.[J]. 机械工程学报,2001,37(6):99-105.

CHEN Anhua,LIU Deshun,ZHU Pingyu. Nonlinear response analysis of a passively vibration-isolated body[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2001,37(6):99-105. (in Chinese)

[17] HILL J M. Radial deflections of rubber bush mountings of finite lengths[J]. International Journal of Engineering Science,1975,13(4):407-422.

[18] HORTON J M,GOVER M J C,TUPHOLME G E. Stiffness of rubber bush mountings subjected to radial loading [J]. Rubber Chemical Technology,2000,73(2):253-264.

[19] HORTON J M,TUPHOLME G E. Approximate radial stiffness of rubber bush mountings[J]. Materials and Design,2006,27(3):226-229.

[20] DEN HARTOG J P. Forced vibration with combined coulomb and viscous friction[J]. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers: Applied Mechacics, 1931,53(9):107-115.

[21] HAESSIG D A,FRIEDLAND B. On the modeling and simulation of friction [J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control,1991,113(3):354-362.

[22] COHN S. Dynamic friction measurement, modeling, and compensation for precise motion control[D]. New Jersey, US:New Jersey Institute of Technology,1998.

[23] 唐振寰,罗贵火,陈伟,等. 橡胶隔振器黏弹性 5 参数分数导数并联动力学模型[J]. 航空动力学报,2013,28(2):275-282.

TANG Zhenhuan,LUO Guihuo,CHEN Wei,et al. Parallel dynamic model of rubber isolator about five-parameter fractional derivatives [J]. Journal of Aerospace Power, 2013,28(2):275-282. (in Chinese)

[24] DE WIT C C,OLSSON H,ATROM K J,et al. A new model for control of systems with friction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1995,40(3):419-425.

(编辑:陈 越)